Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour en savoir plus sur nos formations disponibles, veuillez visiter :
formav.co/explorer

Mathématiques

Session 2018 • Code sujet : **MATGRB1** • Durée : **2 heures** • Coefficient : **Selon la spécialité : 1, 1,5, 2, 2,5 ou 3**

Sommaire

Cliquez sur une partie pour y accéder directement

1. Démarrage d'un train à très haute vitesse et aire d'une pièce de gare (13 questions) **Page 3**

2. Obsolescence programmée des smartphones : probabilités, loi binomiale et test d'hypothèse (13 questions) **Page 7**

3. Ce qu'il faut retenir & Questions fréquentes (FAQ) (Synthèse & Q&A Examen) **Page 11**

Sujet officiel (PDF) : https://coursbtssio.fr/assets/annales/bts-sio/E2 - Mathématiques/2018/BTS SIO - E2 - Mathématiques - Session 2018 - 3-Sujet.pdf

1. Démarrage d’un train à très haute vitesse et aire d’une pièce de gare

La distance parcourue par un wagon propulsé dans un tube à basse pression est modélisée afin d’étudier son démarrage et de vérifier l’objectif de vitesse fixé par les ingénieurs. La dernière partie porte sur l’aire d’une pièce dessinée pour les futures gares, à partir d’un graphique et d’une fonction.

A. Résolution d’une équation différentielle

Question A.1°. Résoudre sur [0, +∞[l’équation différentielle homogène y' - 0,2y = 0, en utilisant la formule fournie.

On écrit l’équation sous la forme fournie : $y' + ay = 0$, avec $a = -0,2$. La formule donne alors $y(t) = ke^{-at}$, où k est une constante réelle. En remplaçant a par sa valeur, on obtient toutes les solutions sur l’intervalle demandé. Le cas $k = 0$ correspond à la solution nulle.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> Les solutions sont $y(t) = ke^{0,2t}$, avec $k \in \mathbb{R}$.

Question A.2°. Vérifier que la fonction g définie sur [0, 3] par g(t) = -15t - 75 est une solution de l’équation différentielle y' - 0,2y = 3t.

1. La dérivée de la fonction proposée est $g'(t) = -15$.
2. On remplace g et g' dans le membre de gauche : $g'(t) - 0,2g(t) = -15 - 0,2(-15t - 75)$.

En développant, on obtient $-15 + 3t + 15 = 3t$, qui est bien le membre de droite de l’équation. Cette égalité étant vraie pour tout $t \in [0, 3]$, la fonction proposée est une solution particulière.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> La fonction $g(t) = -15t - 75$ vérifie bien $g'(t) - 0,2g(t) = 3t$.

Question A.3°. Déduire des questions précédentes l’ensemble des solutions de l’équation différentielle y' - 0,2y = 3t.

Une solution particulière de l’équation avec second membre est $g(t) = -15t - 75$. Toute solution s’obtient en lui ajoutant une solution de l’équation homogène, déterminée à la question précédente. On additionne donc le terme $ke^{0,2t}$ à $g(t)$. La constante k peut prendre toute valeur réelle, ce qui donne l’ensemble complet des solutions sur l’intervalle considéré.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = ke^{0,2t} - 15t - 75$, pour tout $k \in \mathbb{R}$.

Question A.4°. Déterminer la fonction f solution de l’équation différentielle y' - 0,2y = 3t qui vérifie la condition initiale f(0) = 0.

La solution générale est $y(t) = ke^{0,2t} - 15t - 75$. La condition initiale impose $f(0) = 0$. Comme $e^0 = 1$, on a alors $k - 75 = 0$, donc $k = 75$. En reportant cette valeur dans la solution générale, on obtient la fonction recherchée. Cette expression peut également être factorisée pour retrouver la forme donnée dans la partie B.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> $f(t) = 75(e^{0,2t} - 1) - 15t$.

B. Étude de fonction et application

Question B.1.a). À partir des expressions de f(t) et de f'(t) fournies par le logiciel, résoudre sur [0, 3] l'inéquation f'(t) ≥ 0.

Le logiciel fournit $f'(t) = 15e^{0,2t} - 15$. Ainsi, $f'(t) \geq 0$ équivaut à $e^{0,2t} \geq 1$, puisque 15 est positif. La fonction exponentielle étant strictement croissante, cette inégalité équivaut à $0,2t \geq 0$, donc à $t \geq 0$. Tous les nombres de l'intervalle étudié vérifient cette condition.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> $f'(t) \geq 0$ sur tout l'intervalle $[0, 3]$.

Question B.1.b). Déduire de l'étude du signe de f'(t) les variations de la fonction f sur [0, 3].

Intervalle	Signe de $f'(t)$	Variation de f
$[0, 3]$	Positif ou nul	Croissante

La dérivée s'annule seulement en $t = 0$, puis elle est strictement positive. La fonction augmente donc sur l'intervalle. Aux bornes, $f(0) = 0$ et $f(3) = 75(e^{0,6} - 1) - 45 \approx 16,659$. La distance parcourue va ainsi de 0 à environ 16,659 km.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> f est croissante sur $[0, 3]$, de 0 à environ $16,659$ km.

Question B.2°. Déterminer le nombre de kilomètres parcourus par le wagon au bout d'une minute, à partir de f(t) = 75(e^(0,2t) - 1) - 15t, puis arrondir le résultat au dixième.

Au bout d'une minute, on évalue la fonction distance en $t = 1$: $f(1) = 75(e^{0,2} - 1) - 15$. Cette valeur est environ $1,6052$ km. L'énoncé demande un arrondi au dixième : on conserve donc une seule décimale. La quantité obtenue correspond à la distance totale parcourue depuis le départ, et non à une vitesse.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> Après une minute, la distance parcourue est de $1,6$ km au dixième près.

Question B.3.a). La vitesse instantanée correspond à f'(t). Déterminer la vitesse du wagon à t = 2 minutes, en kilomètres par minute, et arrondir le résultat au dixième.

1. La vitesse instantanée est donnée par $f'(t) = 15e^{0,2t} - 15$, en km/min.
2. À $t = 2$, on calcule $f'(2) = 15(e^{0,4} - 1) \approx 7,377$.

Après arrondi au dixième, la vitesse est donc de 7,4 km/min. Il s'agit bien de la vitesse instantanée après deux minutes, conformément à la définition donnée dans le sujet.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> La vitesse à deux minutes est d'environ $7,4$ km/min.

Question B.3.b). Indiquer si l'objectif des ingénieurs est atteint et justifier la réponse à partir de la vitesse calculée et de l'objectif indiqué dans le sujet.

Le seuil visé est 400 km/h, soit $400/60 \approx 6,667$ km/min. La vitesse à deux minutes vaut environ $7,377$ km/min, donc elle dépasse ce seuil. De plus, la vitesse augmente à partir de zéro sur l'intervalle considéré. Elle atteint donc le seuil avant deux minutes, ce qui répond à l'exigence des ingénieurs.

- Seuil : environ 6,667 km/min.
- Vitesse à deux minutes : environ 7,377 km/min.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Oui, l'objectif est atteint : le seuil de 400 km/h est franchi avant deux minutes.

Question B.4°. Choisir parmi les trois propositions l'équation de la tangente T à la courbe C au point d'abscisse 2. Une seule réponse est exacte et aucune justification n'est demandée.

La tangente au point d'abscisse 2 est donnée par $y = f'(2)(t-2) + f(2)$. Ici, $f'(2) = 15(e^{0,4} - 1)$ et $f(2) = 75(e^{0,4} - 1) - 30$. En substituant puis en réduisant, le coefficient de t est $15(e^{0,4} - 1)$ et le terme constant est $45e^{0,4} - 75$. Il faut donc retenir la troisième proposition.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Troisième proposition : $y = 15(e^{0,4} - 1)t + 45e^{0,4} - 75$.

C. Calcul intégral

Question C.1°. Choisir la valeur de l'aire A1 du rectangle OPQR parmi les propositions 3 u. a., 5,25 u. a. et 6,75 u. a. Aucune justification n'est demandée.

Dimension du rectangle OPQR	Valeur
Largeur OP	3
Hauteur OR	2,25

Sur le schéma, le rectangle va de l'axe des ordonnées jusqu'à l'abscisse 3. Sa hauteur est celle du bord supérieur, d'équation $y = 2,25$. Son aire est donc le produit de ces deux dimensions. Parmi les trois choix proposés, seule la valeur obtenue correspond à ce produit.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $A_1 = 6,75$ unités d'aire.

Question C.2°. À l'aide de la primitive fournie, calculer l'aire A2 de la partie du plan limitée par la courbe de g(x) = 27x/(2x² + 18), l'axe des abscisses et les droites d'équations x = 0 et x = 3.

La fonction $g(x) = \dfrac{27x}{2x^2 + 18}$ est positive sur $[0, 3]$, donc l'aire demandée est son intégrale sur cet intervalle. Avec la primitive fournie, $A_2 = \left[\dfrac{27}{4}\ln(x^2+9)\right]_0^3$. Ainsi, $A_2 = \dfrac{27}{4}(\ln 18 - \ln 9) = \dfrac{27}{4}\ln 2$, soit environ 4,679 unités d'aire.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$A_2 = \frac{27}{4}\ln 2 \approx 4,679$ unités d'aire.

Question C.3°. Déduire des questions précédentes l'aire hachurée A, en unité d'aire, en tenant compte de la symétrie de la pièce représentée, puis arrondir le résultat au millième.

1. Pour une moitié de la pièce, l'aire hachurée est le rectangle moins l'aire sous la courbe : $A_1 - A_2$.
2. La pièce étant symétrique par rapport à l'axe des ordonnées, on double cette aire.

On obtient donc $A = 2\left(6,75 - \frac{27}{4}\ln 2\right)$. La valeur est environ 4,1425 unités d'aire. Arrondie au millième, elle vaut 4,143 unités d'aire.

✓ RÉPONSE À RETENIR

L'aire hachurée totale est $A \approx 4,143$ unités d'aire, au millième près.

2. Obsolescence programmée des smartphones : probabilités, loi binomiale et test d'hypothèse

L'exercice étudie l'obsolescence technique et logicielle de smartphones, puis modélise le nombre d'appareils non réparables dans un lot prélevé au service après-vente. Il se termine par un test bilatéral visant à vérifier une proportion issue d'un sondage sur la marque B.

A. Probabilités conditionnelles

Question A.1°. À partir des informations de l'énoncé sur les 200 smartphones, compléter le tableau d'effectifs croisant l'obsolescence technique et l'obsolescence logicielle, avec les totaux correspondants.

Sur 200 smartphones, il y en a 6 touchés par l'obsolescence technique et 16 par l'obsolescence logicielle. Parmi les 16 touchés par l'obsolescence logicielle, 12,5 % sont aussi touchés par l'obsolescence technique, soit 2. Les autres effectifs se déduisent des totaux.

Smartphones	Touchés par l'obsolescence logicielle	Non touchés par l'obsolescence logicielle	Total
Touchés par l'obsolescence technique	2	4	6
Non touchés par l'obsolescence technique	14	180	194
Total	16	184	200

Tableau d'effectifs complété

Smartphones	touchés par l'obsolescence logicielle	non touchés par l'obsolescence logicielle	Total
touchés par l'obsolescence technique	2	4	6
non touchés par l'obsolescence technique	14	180	194
Total	16	184	200

✓ RÉPONSE À RETENIR

Effectifs : 2, 4, 6 ; 14, 180, 194 ; totaux 16, 184, 200.

Question A.2°. En notant T l'événement correspondant à une obsolescence technique et L l'événement correspondant à une obsolescence logicielle, donner P(T), P(L) et P_L(T), la probabilité de T sachant L.

Les deux premières probabilités sont les proportions données dans l'énoncé. La troisième est également indiquée directement : parmi les smartphones touchés par l'obsolescence logicielle, 12,5 % sont aussi touchés par l'obsolescence technique.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$P(T) = 0{,}03$; $P(L) = 0{,}08$; $P_L(T) = 0{,}125$.

Question A.3.a). Calculer la probabilité $P(T \cap L)$ qu'un smartphone soit touché à la fois par l'obsolescence technique et par l'obsolescence logicielle.

La formule de l'intersection donne $P(T \cap L) = P(L) \times P_L(T)$. Ainsi, $0{,}08 \times 0{,}125 = 0{,}01$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$P(T \cap L) = 0{,}010$.

Question A.3.b). Calculer la probabilité $P(T \cup L)$ qu'un smartphone soit touché par au moins l'un des deux types d'obsolescence.

L'événement $T \cup L$ correspond au fait d'être touché par au moins un type d'obsolescence. On soustrait l'intersection pour ne pas la compter deux fois : $0{,}03 + 0{,}08 - 0{,}01 = 0{,}10$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$P(T \cup L) = 0{,}100$, soit 10 %.

Question A.3.c). Calculer P_T(L), la probabilité qu'un smartphone soit touché par l'obsolescence logicielle sachant qu'il est touché par l'obsolescence technique.

La probabilité conditionnelle cherchée est $P_T(L) = P(T \cap L) / P(T)$. On obtient $0{,}01 / 0{,}03 = 1/3$, soit environ 0,333 à 10^{-3} près.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$P_T(L) = 1/3 \approx 0{,}333$.

B. Loi binomiale

Question B.1°. Justifier que la variable aléatoire X, qui compte le nombre de smartphones non réparables parmi 50 appareils prélevés, suit une loi binomiale, puis déterminer ses paramètres.

Le prélèvement est assimilé à des tirages avec remise : les tirages sont indépendants et la probabilité d'obtenir un smartphone non réparable reste égale à 0,045. X compte le nombre de smartphones non réparables lors de 50 tirages. C'est donc une loi binomiale.

✓ RÉPONSE À RETENIR

X suit la loi binomiale de paramètres $n = 50$ et $p = 0{,}045$.

Question B.2°. Calculer la probabilité que les 50 smartphones du lot soient tous réparables.

La probabilité qu'un smartphone soit réparable est $1 - 0{,}045 = 0{,}955$. Les 50 tirages étant indépendants, la probabilité qu'ils soient tous réparables vaut $0{,}955^{50}$, soit environ 0,100 à 10^{-3} près.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$P(X = 0) \approx 0{,}100$.

Question B.3.a). Faire tourner à la main l'algorithme pour i allant de 0 à 3, puis compléter le tableau avec les valeurs de P(X = i) et les valeurs successives de la somme S.

À chaque étape, l'algorithme ajoute $P(X = i)$ à la somme précédente. Les probabilités et les sommes cumulées, arrondies au millième, sont :

i	0	1	2	3
P(X = i)	0,100	0,236	0,272	0,205
S	0,100	0,336	0,608	0,813

✓ **RÉPONSE À RETENIR**

Probabilités : 0,100 ; 0,236 ; 0,272 ; 0,205. Sommes cumulées : 0,100 ; 0,336 ; 0,608 ; 0,813.

Question B.3.b). Donner la valeur de S à la fin de l'algorithme et interpréter le résultat dans le contexte du nombre de smartphones non réparables du lot.

À la fin de la boucle, S est la somme des probabilités pour i = 0, 1, 2 et 3. Elle correspond donc à P(X ≤ 3), la probabilité qu'un lot contienne au plus trois smartphones non réparables.

✓ **RÉPONSE À RETENIR**

S ≈ 0,813 : environ 81,3 % des lots contiennent au plus trois smartphones non réparables.

Question B.4°. Calculer l'espérance de la variable aléatoire X et interpréter le résultat dans le contexte des lots de 50 smartphones.

Pour une loi binomiale, E(X) = np. Ainsi, E(X) = 50 × 0,045 = 2,25. Sur un grand nombre de lots, le nombre moyen de smartphones non réparables est 2,25 par lot.

✓ **RÉPONSE À RETENIR**

E(X) = 2,25 smartphones non réparables par lot en moyenne.

C. Test d'hypothèse

Question C.1°. Sous l'hypothèse nulle H0, choisir la valeur approchée de h, arrondie au centième, telle que P(0,55 - h ≤ F ≤ 0,55 + h) = 0,95. Les propositions sont 0,05, 0,06 et 0,07.

Pour une loi normale, l'intervalle central de probabilité 0,95 s'étend approximativement à 1,96 écarts types de part et d'autre de la moyenne. Donc h ≈ 1,96 × 0,037 = 0,07252, soit 0,07 au centième.

✓ **RÉPONSE À RETENIR**

h ≈ 0,07.

Question C.2°. Énoncer la règle de décision du test bilatéral au seuil de signification de 5 % pour les hypothèses H0 : p = 0,55 et H1 : p ≠ 0,55.

Au seuil de 5 %, on conserve H_0 si la fréquence observée se trouve dans l'intervalle central, délimité par 0,55 − 0,07 et 0,55 + 0,07.

- Si 0,48 ≤ f ≤ 0,62, on ne rejette pas H_0.
- Sinon, on rejette H_0.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Ne pas rejeter H_0 si $0{,}48 \leq f \leq 0{,}62$; la rejeter sinon.

Question C.3°. Sur l'échantillon de 180 personnes interrogées, 76 pensent que la marque B pratique l'obsolescence programmée. Conclure le test.

La fréquence observée vaut 76 / 180 ≈ 0,422. Elle est inférieure à 0,48, la borne basse de l'intervalle de conservation de H_0. On rejette donc H_0 au seuil de 5 %.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$f \approx 0{,}422$: on rejette H_0.

Ce qu'il faut retenir de ce sujet (Session 2018)

Bilan de l'épreuve : Épreuve de mathématiques du BTS, session 2018, code MATGRB1, durée deux heures; coefficient variable selon la spécialité. L'exercice 1 porte sur le démarrage d'un train à très haute vitesse et l'aire d'une pièce de gare; l'exercice 2 étudie l'obsolescence programmée des smartphones. Les compétences évaluées comprennent équations différentielles, analyse, calcul intégral, probabilités, loi binomiale et test d'hypothèse.

Notions-clés, formules & règles à maîtriser

- Pour résoudre y' - 0,2y = 3t, combiner la solution générale de l'équation homogène avec une solution particulière.
- Lorsque f représente une distance en fonction du temps, sa dérivée f' représente la vitesse instantanée dans les unités correspondantes.
- L'aire sous une courbe positive sur [a, b] se calcule par l'intégrale de la fonction entre a et b.
- Pour une loi binomiale de paramètres n et p, E(X) = np et P(X = i) = C(n,i)p^i(1-p)^(n-i).

Points de vigilance & attentes du jury

- Vérifier les unités avant de comparer une vitesse en km/min à un objectif exprimé en km/h.
- Distinguer dans un tableau d'effectifs les intersections, les totaux marginaux et les probabilités conditionnelles.
- Pour une loi binomiale, préciser le nombre d'essais, la probabilité de succès et l'indépendance des tirages.
- Dans un test bilatéral, comparer la fréquence observée aux bornes de l'intervalle d'acceptation.

Questions fréquentes sur cette épreuve (Q&A Examen)

Q : Comment trouver la solution générale d'une équation différentielle avec un second membre ?

Résolvez d'abord l'équation homogène associée. Ajoutez à sa solution générale une solution particulière de l'équation complète. Si une condition initiale est donnée, utilisez-la ensuite pour déterminer la constante.

Q : Comment utiliser la dérivée pour vérifier l'objectif de vitesse du wagon ?

La dérivée de la distance donne la vitesse dans les unités de distance et de temps utilisées par la fonction. Calculez-la à l'instant demandé, puis convertissez les unités avant de la comparer à l'objectif.

Q : Comment organiser les calculs de la partie sur la loi binomiale ?

Identifiez les paramètres n et p, puis calculez les probabilités demandées avec la loi binomiale. Pour l'algorithme, ajoutez chaque probabilité à la somme S et interprétez le cumul dans le contexte.

Q : Que faut-il faire pour conclure le test d'hypothèse de cet exercice ?

Appliquez la règle de décision au seuil de 5 % et comparez la fréquence observée aux bornes de l'intervalle d'acceptation. Indiquez ensuite si les données conduisent à rejeter l'hypothèse nulle.

Sujet officiel associé (PDF) : https://coursbtssio.fr/assets/annales/bts-sio/E2 - Mathématiques/2018/BTS SIO - E2 - Mathématiques - Session 2018 - 3-Sujet.pdf
Ressources BTS Services Informatiques aux Organisations : Toutes les annales & corrigés • Fiches de révision complètes • Simulateur de notes d'examen

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.