Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour en savoir plus sur nos formations disponibles, veuillez visiter :
formav.co/explorer

BTS SIO

Mathématiques - Groupement B des BTS

Session 2022 • Code sujet : **22MATGRB1** • Durée : **2 heures** • Coefficient : **2, sauf 3 pour la spécialité Traitement des matériaux**

Sommaire

Cliquez sur une partie pour y accéder directement

1. Modélisation de la vitesse et du freinage d'un chariot (12 questions) **Page 3**

2. Probabilités, durée de vie des tubes fluorescents et intervalle de confiance (9 questions) **Page 7**

3. Ce qu'il faut retenir & Questions fréquentes (FAQ) (Synthèse & Q&A Examen) **Page 11**

Sujet officiel (PDF) : https://coursbtssio.fr/assets/annales/bts-sio/E2 - Mathématiques/2022/BTS SIO - E2 - Mathématiques - Session 2022 - 1-Sujet.pdf

1. Modélisation de la vitesse et du freinage d'un chariot

Un chariot de fête foraine se déplace à 20 m/s lorsqu'il commence à être freiné sur un axe horizontal. Sa vitesse est modélisée par une fonction exponentielle étudiée au moyen d'une équation différentielle, de ses variations, d'une primitive et d'un développement limité.

Partie A - Résolution d'une équation différentielle

Question 1.a. Résoudre l'équation différentielle homogène y' + 0,8y = 0 sur un intervalle, en utilisant la formule fournie.

La formule donnée pour l'équation homogène, avec $a = 0,8$, donne sur tout intervalle I :

$y(t) = ke^{-0,8t}$, où $k \in \mathbb{R}$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = ke^{-0,8t}$, avec $k \in \mathbb{R}$.

Question 1.b. Soit g définie par g(t) = 5 sur [0 ; +∞[. Vérifier que g est une solution de l'équation différentielle y' + 0,8y = 4.

Comme $g(t) = 5$, on a $g'(t) = 0$. Ainsi, $g'(t) + 0,8g(t) = 0 + 0,8 \times 5 = 4$ pour tout $t \geq 0$. La fonction vérifie bien l'équation.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $g(t) = 5$ est une solution de $y' + 0,8y = 4$.

Question 1.c. Déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle y' + 0,8y = 4.

Une solution particulière est $g(t) = 5$. On lui ajoute les solutions de l'équation homogène associée :

$y(t) = 5 + ke^{-0,8t}$, où k est une constante réelle.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = 5 + ke^{-0,8t}$, avec $k \in \mathbb{R}$.

Question 2. Déterminer la solution f de l'équation différentielle y' + 0,8y = 4 qui vérifie la condition initiale f(0) = 20.

La solution générale est $f(t) = 5 + ke^{-0,8t}$. La condition initiale donne $5 + k = 20$, donc $k = 15$.

$f(t) = 15e^{-0,8t} + 5$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$f(t) = 15e^{-0,8t} + 5$.

Partie B - Étude de la fonction f

Question 1.a. Pour f(t) = 15e^(-0,8t) + 5, démontrer que la limite de f(t) lorsque t tend vers +∞ est égale à 5.

Lorsque $t \to +\infty$, $-0,8t \to -\infty$, donc $e^{-0,8t} \to 0$. Par conséquent, $f(t) = 15e^{-0,8t} + 5 \to 15 \times 0 + 5 = 5$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = 5$.

Question 1.b. Déduire de la limite de f en +∞ que sa courbe représentative admet une asymptote, puis en donner une équation.

La limite de $f(t)$ en $+\infty$ étant égale à 5, la courbe admet une asymptote horizontale d'équation $y = 5$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Asymptote horizontale : $y = 5$.

Question 2. Sachant que f'(t) = -12e^(-0,8t), dresser le tableau de variation de f sur [0 ; +∞[.

Pour tout $t \geq 0$, $e^{-0,8t} > 0$, donc $f'(t) = -12e^{-0,8t} < 0$. Ainsi, f est strictement décroissante. De plus, $f(0) = 20$ et sa limite vaut 5.

t	**0**	$+\infty$
$f'(t)$	$-$	
$f(t)$	20	$\searrow 5$

✓ RÉPONSE À RETENIR

f décroît de 20 vers 5 sur $[0; +\infty[$.

Question 3. Indiquer si le système de freinage permet au chariot de s'arrêter.

La vitesse est $f(t) = 15e^{-0,8t} + 5$. Pour tout temps fini, le terme exponentiel est positif : la vitesse reste donc supérieure à 5 et ne s'annule pas.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Non : le chariot ne s'arrête pas selon ce modèle.

Question 4.a. Pour F(t) = -18,75e^(-0,8t) + 5t, vérifier que F est une primitive de f sur [0 ; +∞[.

En dérivant F, on obtient :

$$F'(t) = (-18,75)(-0,8)e^{-0,8t} + 5 = 15e^{-0,8t} + 5 = f(t).$$

Donc F est une primitive de f sur $[0; +\infty[$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$F'(t) = f(t)$, donc F est une primitive de f.

Question 4.b. Calculer la valeur exacte de la distance parcourue par le chariot entre $t_0 = 0$ et $t_1 = 1$ à l'aide de l'intégrale de sa vitesse, puis donner une valeur arrondie au centimètre.

La distance parcourue est l'intégrale de la vitesse entre 0 et 1 :

$$d = F(1) - F(0) = 23,75 - 18,75e^{-0,8} \approx 15,3251 \text{ m}.$$

Arrondie au centimètre, elle vaut 15,33 m.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$d = 23,75 - 18,75e^{-0,8}$ m $\approx 15,33$ m.

Partie C - Étude locale

Question 1. Choisir, parmi les trois propositions, le développement limité de f à l'ordre 2 au voisinage de zéro. Une seule réponse est exacte et aucune justification n'est demandée.

Le logiciel donne la partie régulière $20 - 12t + \frac{24}{5}t^2$. À l'ordre 2, le reste doit s'écrire $t^2\varepsilon(t)$, avec $\varepsilon(t) \to 0$. C'est donc la troisième proposition.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Troisième proposition : $20 - 12t + 4,8t^2 + t^2\varepsilon(t)$, avec $\varepsilon(t) \to 0$.

Question 2. **Donner une équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 0.**

Le point de tangence est $(0;20)$ et la pente vaut $f'(0) = -12e^0 = -12$. Donc l'équation de la tangente est $y = 20 - 12t$.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y = 20 - 12t$.

2. Probabilités, durée de vie des tubes fluorescents et intervalle de confiance

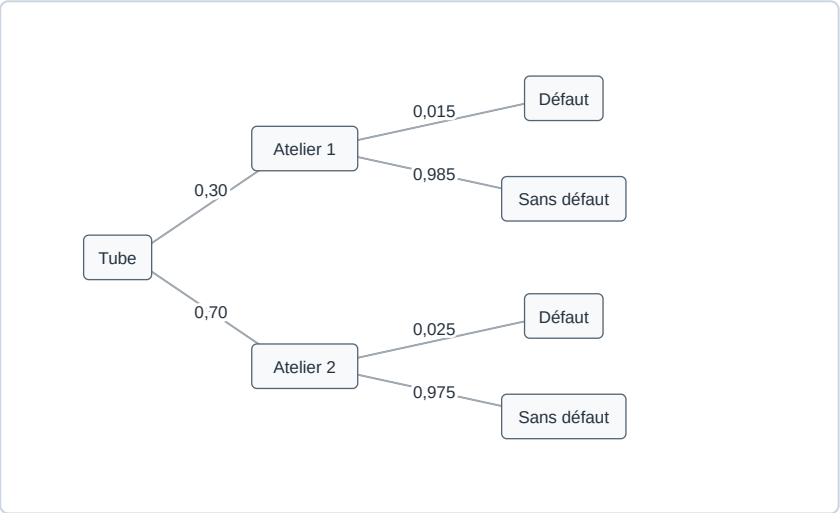
Une usine fabrique des tubes fluorescents dans deux ateliers dont les proportions de production et les taux de défaut diffèrent. L'exercice étudie les probabilités associées aux ateliers, la durée de vie des tubes selon une loi exponentielle, puis l'estimation de la proportion de rivets conformes à partir d'un échantillon.

Partie A - Probabilités conditionnelles

Question 1. Réaliser un arbre pondéré représentant la situation, en utilisant les proportions de production des deux ateliers et leurs taux de défaut.

On sépare d'abord la production entre les deux ateliers, puis chaque atelier selon la présence ou non d'un défaut. Les probabilités inscrites sur les branches issues d'un atelier sont conditionnelles à cet atelier. À chaque embranchement, leur somme vaut 1 : les probabilités de non-défaut sont les compléments des taux de défaut.

Arbre pondéré de production et de conformité



Les probabilités des branches de second niveau sont conditionnelles à l'atelier.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Arbre pondéré : atelier 1 (0,30), puis défaut (0,015) ou absence de défaut (0,985) ; atelier 2 (0,70), puis défaut (0,025) ou absence de défaut (0,975).

Question 2. Calculer la probabilité qu'un tube provienne de l'atelier 1 et présente un défaut, soit P(A₁ ∩ D).

La probabilité qu'un tube provienne de l'atelier 1 et présente un défaut se calcule en multipliant la probabilité de choisir cet atelier par son taux de défaut. Ainsi, avec les données de l'énoncé : $P(A_1 \cap D) = P(A_1) \times P(D \mid A_1) = 0,30 \times 0,015 = 0,0045$. Il s'agit d'une probabilité sur l'ensemble de la production, et non du seul atelier 1.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$P(A_1 \cap D) = 0,0045$, soit 0,45 %.

Question 3. **À partir des données de production et des taux de défaut, déterminer la probabilité qu'un tube présente un défaut.**

Atelier	Défaut	Sans défaut	Total
1	0,30 × 0,015 = 0,0045	0,30 × 0,985 = 0,2955	0,30
2	0,70 × 0,025 = 0,0175	0,70 × 0,975 = 0,6825	0,70
Total	0,022	0,978	1

Les deux événements « défaut issu de l'atelier 1 » et « défaut issu de l'atelier 2 » sont incompatibles et couvrent tous les défauts. On additionne donc leurs probabilités : $P(D) = 0,0045 + 0,0175 = 0,022$, soit 2,2 % de la production.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $P(D) = 0,022$, soit 2,2 %.

Question 4. **Sachant que le tube choisi ne présente pas de défaut, calculer la probabilité qu'il provienne de l'atelier 2.**

On cherche une probabilité conditionnelle : parmi les tubes sans défaut, quelle part vient de l'atelier 2 ? La probabilité d'être issu de l'atelier 2 et sans défaut vaut $0,70 \times 0,975 = 0,6825$. La probabilité totale d'absence de défaut est $1 - 0,022 = 0,978$. On divise la première valeur par la seconde.

$P(A_2 \mid \overline{D}) = \dfrac{0,6825}{0,978} \approx 0,69785.$

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $P(A_2 \mid \overline{D}) \approx 0,698$, soit 69,8 %.

Partie B - Durée de vie des tubes fluorescents

Question 1. **La durée de bon fonctionnement T suit une loi exponentielle de paramètre λ = 0,001. Déterminer son espérance E(T) et interpréter le résultat dans le contexte.**

Pour une loi exponentielle de paramètre λ, l'espérance est $E(T) = \dfrac{1}{\lambda}$. Avec $\lambda = 0,001$, on obtient $E(T) = \dfrac{1}{0,001} = 1\,000$ heures. Cette valeur représente la durée moyenne de bon fonctionnement des tubes dans le modèle considéré ; elle ne signifie pas que chaque tube fonctionne exactement 1 000 heures.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $E(T) = 1\,000$ heures : durée moyenne de bon fonctionnement.

Question 2. **Calculer, en l'arrondissant à 10^{-2}, la probabilité que la durée de bon fonctionnement d'un tube choisi au hasard soit inférieure à 8 000 heures.**

1. La formule de la loi exponentielle donne $P(T \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}$.
2. Pour $t = 8\,000$ et $\lambda = 0,001$, $P(T < 8\,000) = 1 - e^{-0,001 \times 8\,000} = 1 - e^{-8} \approx 0,9996645$.
3. Arrondie au centième, cette probabilité vaut 1,00. Elle est très proche de 1, sans être exactement égale à 1 avant arrondi.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $P(T < 8\,000) \approx 1,00$ au centième.

Question 3. **Calculer, en l'arrondissant à 10^{-2}, la probabilité que la durée de bon fonctionnement d'un tube choisi au hasard soit supérieure à 10 000 heures.**

Pour une loi exponentielle, la probabilité de dépasser une durée t est le complément de la probabilité de ne pas la dépasser : $P(T > t) = e^{-\lambda t}$. En prenant $t = 10\,000$ heures et $\lambda = 0,001$, on obtient $P(T > 10\,000) = e^{-10} \approx 0,0000454$. Arrondie au centième, cette probabilité est nulle, même si sa valeur exacte est positive.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $P(T > 10\,000) \approx 0,00$ au centième.

Partie C - Intervalle de confiance

Question 1. **Parmi les 1 000 rivets prélevés, 975 sont conformes. Donner une estimation ponctuelle de la proportion inconnue p de rivets conformes dans la production.**

L'estimation ponctuelle de la proportion inconnue est la fréquence observée dans l'échantillon. Parmi les 1 000 rivets prélevés, 975 sont conformes, donc $f = \dfrac{975}{1\,000} = 0,975$. Cette valeur, soit 97,5 %, sert d'estimation de la proportion de rivets conformes dans l'ensemble de la production.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Estimation ponctuelle : $\hat{p} = 0,975$, soit 97,5 %.

Question 2. À l'aide de la formule fournie, déterminer un intervalle de confiance de niveau 95 % pour la proportion p de rivets conformes, centré sur la fréquence observée. Arrondir les bornes au millième.

Calcul	Valeur
Fréquence observée f	0,975
Marge $1,96\sqrt{f(1-f)/n}$	$1,96\sqrt{0,975 \times 0,025/1\,000} \approx 0,009677$
Bornes avant arrondi	$0,975 - 0,009677$ et $0,975 + 0,009677$

En appliquant la formule de l'énoncé avec $n = 1\,000$, puis en arrondissant chaque borne au millième, on obtient l'intervalle de confiance centré sur la fréquence observée.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> Intervalle de confiance à 95 % : $[0,965\ ;\ 0,985]$.

Ce qu'il faut retenir de ce sujet (Session 2022)

Bilan de l'épreuve : L'épreuve de mathématiques du BTS, Groupement B, session 2022, code 22MATGRB1, dure 2 heures et comporte deux exercices de 10 points. Le coefficient est 2, sauf pour Traitement des matériaux où il est 3. Le sujet modélise le freinage d'un chariot et la production de tubes fluorescents, et évalue équations différentielles, analyse de fonctions, probabilités, loi exponentielle et intervalle de confiance.

Notions-clés, formules & règles à maîtriser

- Pour y' + ay = b, une solution particulière constante vaut b/a et les solutions générales s'obtiennent en lui ajoutant les solutions de l'équation homogène.
- Si f(t) tend vers L quand t tend vers +∞, la courbe de f admet l'asymptote horizontale y = L.
- Pour une loi exponentielle de paramètre λ, E(T) = 1/λ et P(T ≤ t) = 1 - e^(-λt).
- Pour des événements A et D, P(A ∩ D) = P(A)P(D|A) ; l'intervalle fourni pour une proportion utilise la fréquence observée.

Points de vigilance & attentes du jury

- Après avoir obtenu la solution générale de l'équation différentielle, appliquer la condition initiale pour déterminer la constante.
- Une vitesse qui tend vers zéro ne s'annule pas nécessairement à un instant fini : distinguer limite et arrêt effectif.
- Dans l'arbre pondéré, placer les probabilités conditionnelles sur les branches et vérifier la somme des branches issues de chaque nœud.
- Respecter les arrondis demandés : au centième pour les probabilités de durée de vie et au millième pour l'intervalle.

Questions fréquentes sur cette épreuve (Q&A Examen)

Q : Comment calculer la distance parcourue à partir de la vitesse du chariot ?

La distance entre deux instants est l'intégrale de la vitesse sur cet intervalle. Si F est une primitive de f, calculer $F(t_1) - F(t_0)$, puis donner la valeur exacte et l'arrondi demandé.

Q : Comment calculer la probabilité qu'un tube soit défectueux ?

Additionner les probabilités des chemins qui aboutissent à un tube défectueux. Pour chaque atelier, multiplier sa proportion de production par son taux de défaut, puis additionner les deux résultats.

Q : Comment organiser les deux heures de cette épreuve ?

Le sujet comporte deux exercices de 10 points chacun et les trois parties de chaque exercice peuvent être traitées indépendamment. Répartir le temps entre les exercices, traiter les questions accessibles et garder quelques minutes pour vérifier calculs et arrondis.

Q : Quels critères faut-il respecter pour obtenir les points dans les réponses ?

Présenter des calculs lisibles, choisir les formules adaptées et justifier les résultats demandés. Respecter les unités et les arrondis indiqués. Pour le QCM sur le développement limité, recopier une seule réponse, sans justification.

Sujet officiel associé (PDF) : https://coursbtssio.fr/assets/annales/bts-sio/E2 - Mathématiques/2022/BTS SIO - E2 - Mathématiques - Session 2022 - 1-Sujet.pdf
Ressources BTS Services Informatiques aux Organisations : Toutes les annales & corrigés • Fiches de révision complètes • Simulateur de notes d'examen

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.