Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour en savoir plus sur nos formations disponibles, veuillez visiter :
formav.co/explorer

BTS SIO

Mathématiques

Session 2022 • Code sujet : **22MATGRB2** • Durée : **2 heures** • Coefficient : **1,5 pour Conception et industrialisation en microtechniques ; 2 pour Électrotechnique**

Sommaire

Cliquez sur une partie pour y accéder directement

1. Freinage d'un chariot de fête foraine (12 questions) **Page 3**

2. Transformée de Laplace d'un système électrique entrée-sortie (9 questions) **Page 7**

3. Ce qu'il faut retenir & Questions fréquentes (FAQ) (Synthèse & Q&A Examen) **Page 11**

Sujet officiel (PDF) : https://coursbtssio.fr/assets/annales/bts-sio/E2 - Mathématiques/2022/BTS SIO - E2 - Mathématiques - Session 2022 - 2-Sujet.pdf

1. Freinage d'un chariot de fête foraine

Un chariot lancé à 20 m·s⁻¹ est ralenti par un système de freinage, et sa vitesse est modélisée par une fonction f du temps. L'étude porte sur une équation différentielle, les variations et la limite de f, la distance parcourue et le développement limité de la vitesse au voisinage de zéro.

Partie A - Résolution d'une équation différentielle

Question 1.a. Résoudre l'équation différentielle homogène (E_0) : y' + 0,8y = 0 sur l'intervalle considéré.

La formule fournie donne, pour une équation de la forme $y' + ay = 0$, les solutions $y(t) = ke^{-at}$, où k est une constante réelle. En prenant $a = 0,8$, on obtient la famille des solutions sur l'intervalle $[0; +\infty[$. Aucune condition initiale n'étant imposée ici, k reste libre.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = ke^{-0,8t}$, avec $k \in \mathbb{R}$.

Question 1.b. Soit g définie par g(t) = 5. Vérifier que g est solution de l'équation différentielle (E) : y' + 0,8y = 4.

La fonction $g(t) = 5$ est constante, donc $g'(t) = 0$. En la substituant dans le membre de gauche de l'équation, on vérifie que celui-ci vaut bien le second membre :

$$g'(t) + 0,8g(t) = 0 + 0,8 \times 5 = 4.$$

L'égalité étant vraie pour tout t, g est bien une solution de (E).

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $g(t) = 5$ est solution de (E).

Question 1.c. Déduire des résultats précédents l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E) : y' + 0,8y = 4.

1. Une solution particulière de (E) est $g(t) = 5$.
2. Les solutions de l'équation homogène associée sont $ke^{-0,8t}$.
3. Les solutions de (E) s'obtiennent en additionnant ces deux expressions.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = ke^{-0,8t} + 5$, avec $k \in \mathbb{R}$.

Question 2. **Déterminer la solution f de (E) qui vérifie la condition initiale f(0) = 20.**

La solution générale est $f(t) = ke^{-0,8t} + 5$. La condition initiale donne $f(0) = k + 5 = 20$, puisque $e^0 = 1$. Ainsi, $k = 20 - 5 = 15$. En remplaçant la constante par cette valeur, on obtient l'unique solution demandée.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $f(t) = 15e^{-0,8t} + 5$.

Partie B - Étude de la fonction f

Question 1.a. **Démontrer que la limite de f(t) lorsque t tend vers +∞ est égale à 5.**

On part de l'expression donnée $f(t) = 15e^{-0,8t} + 5$. Lorsque $t \to +\infty$, on a $-0,8t \to -\infty$, donc $e^{-0,8t} \to 0$. Le terme exponentiel tend ainsi vers zéro, tandis que le terme constant reste égal à 5. Par somme, la limite de $f(t)$ vaut 5.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = 5$.

Question 1.b. **Déduire de la limite précédente que la courbe C admet une asymptote, puis en donner une équation.**

> Si une fonction tend vers une limite finie à l'infini, sa courbe admet une asymptote horizontale d'ordonnée égale à cette limite.

Ici, $f(t) \to 5$ quand $t \to +\infty$. La courbe C admet donc une asymptote horizontale en $+\infty$, d'équation $y = 5$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Asymptote horizontale : $y = 5$.

Question 2. **À partir de l'expression donnée de f'(t), dresser le tableau de variation de f sur [0 ; +∞[.**

Comme $e^{-0,8t} > 0$ pour tout $t \geq 0$, on a $f'(t) = -12e^{-0,8t} < 0$. La fonction est donc strictement décroissante. Elle part de $f(0) = 20$ et tend vers 5.

t	0	$+\infty$
$f'(t)$	$-$	
$f(t)$	20	$\searrow 5$

✓ RÉPONSE À RETENIR

f décroît strictement de 20 vers 5 sur $[0;+\infty[$.

Question 3. Déterminer si le système de freinage permet au chariot de s'arrêter.

Un arrêt correspondrait à une vitesse nulle à un instant fini. Or la vitesse décroît vers 5, sa limite, et reste supérieure à cette valeur pour tout temps fini. Le modèle ne prévoit donc pas que le chariot s'arrête.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Non : la vitesse tend vers $5\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$ sans s'annuler.

Question 4.a. Vérifier que F(t) = −18,75e^(−0,8t) + 5t est une primitive de f sur [0 ; +∞[.

On dérive chaque terme de $F(t) = -18,75e^{-0,8t} + 5t$. La dérivée de l'exponentielle composée donne :

$$F'(t) = -18,75 \times (-0,8)e^{-0,8t} + 5 = 15e^{-0,8t} + 5 = f(t).$$

La dérivée de F étant égale à f, F est une primitive de f sur l'intervalle demandé.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$F'(t) = f(t)$, donc F est une primitive de f.

Question 4.b. Calculer la valeur exacte de la distance parcourue entre les instants $t_0 = 0$ et $t_1 = 1$, puis donner une valeur arrondie au centimètre.

La distance est l'intégrale de la vitesse entre 0 et 1. En utilisant la primitive F, on calcule $d = F(1) - F(0)$:

$$d = (-18,75e^{-0,8} + 5) - (-18,75) = 23,75 - 18,75e^{-0,8}.$$

Cette valeur exacte est en mètres. Son approximation au centimètre est obtenue en arrondissant à deux décimales.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$d = 23,75 - 18,75e^{-0,8} \approx 15,33\ \mathrm{m}$.

Partie C - Étude locale

Question 1. Choisir et recopier l'unique développement limité de f à l'ordre 2 au voisinage de zéro. Aucune justification n'est demandée. Une réponse fausse, multiple ou absente ne rapporte ni n'enlève de point.

Le logiciel affiche la partie régulière $20 - 12t + \frac{24}{5}t^2$. Parmi les propositions, il faut recopier celle qui ajoute un reste de la forme $t^2\varepsilon(t)$, avec $\varepsilon(t) \to 0$ lorsque $t \to 0$. Cette forme caractérise le reste d'un développement limité à l'ordre 2.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $f(t) = 20 - 12t + 4,8t^2 + t^2\varepsilon(t)$, avec $\lim\limits_{t\to 0} \varepsilon(t) = 0$.

Question 2. Donner une équation de la tangente T à la courbe C au point d'abscisse 0.

L'équation de la tangente au point d'abscisse 0 est $y = f(0) + f'(0)t$. D'après l'expression de f, $f(0) = 15 + 5 = 20$. Avec la dérivée donnée, $f'(0) = -12e^0 = -12$. La tangente passe donc par $(0; 20)$ et a pour pente -12.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $T : y = 20 - 12t$.

2. Transformée de Laplace d'un système électrique entrée-sortie

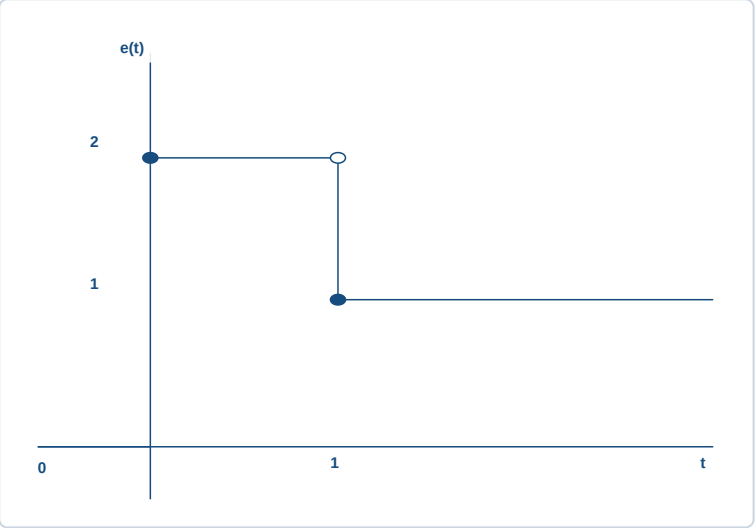
Un système électrique causal reçoit le signal e(t) = 2U(t) − U(t − 1), où U est l'échelon unité, et possède la fonction de transfert H(p) = 1/(p + 1). L'exercice demande d'étudier les transformées de Laplace des signaux d'entrée et de sortie, puis d'établir l'expression et la représentation graphique de la sortie.

Partie A - Signal d'entrée

Question 1. Tracer, sur le document-réponse à rendre avec la copie, la courbe représentative de la fonction e(t).

Le signal est causal : il vaut 0 avant 0. Pour $0 \leq t < 1$, seul le premier échelon contribue et $e(t) = 2$. À partir de $t = 1$, les deux échelons valent 1, donc $e(t) = 1$.

Signal d'entrée e(t)



✓ RÉPONSE À RETENIR

$e(t) = 0$ si $t < 0$, $e(t) = 2$ si $0 \leq t < 1$, et $e(t) = 1$ si $t \geq 1$.

Question 2. Déterminer la transformée de Laplace E(p) du signal d'entrée e(t).

Par linéarité et d'après le formulaire, $\mathcal{L}\{U(t)\} = 1/p$ et $\mathcal{L}\{U(t-1)\} = e^{-p}/p$. Ainsi, $E(p) = 2/p - e^{-p}/p$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$$E(p) = \frac{2 - e^{-p}}{p}.$$

Partie B - Signal de sortie

Question 1. Démontrer que S(p) = 2/[p(p + 1)] − [1/[p(p + 1)]]e⁻ᵖ.

La relation entrée-sortie donne $S(p) = H(p)E(p)$. En substituant les expressions de $H(p)$ et de $E(p)$, puis en distribuant le facteur $1/(p+1)$, on obtient l'égalité demandée.

> ✓ RÉPONSE À RETENIR
>
> $$S(p) = \frac{2}{p(p+1)} - \frac{e^{-p}}{p(p+1)}.$$

Question 2. Vérifier que 1/[p(p + 1)] = 1/p − 1/(p + 1).

En réduisant au même dénominateur, $\frac{1}{p} - \frac{1}{p+1} = \frac{p+1-p}{p(p+1)} = \frac{1}{p(p+1)}$. L'égalité est vérifiée pour les valeurs de p où les expressions sont définies.

> ✓ RÉPONSE À RETENIR
>
> $$\frac{1}{p(p+1)} = \frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}.$$

Question 3. Donner les transformées de Laplace inverses de 1/p, de 1/(p + 1), de (1/p)e⁻ᵖ et de [1/(p + 1)]e⁻ᵖ.

On utilise les transformées usuelles et la propriété de retard : $\mathcal{L}^{-1}\{F(p)e^{-p}\} = f(t-1)U(t-1)$. Dans l'ordre demandé, les inverses sont :

1. $U(t)$;
2. $e^{-t}U(t)$;
3. $U(t-1)$;
4. $e^{-(t-1)}U(t-1)$.

> ✓ RÉPONSE À RETENIR
>
> Dans l'ordre : $U(t)$, $e^{-t}U(t)$, $U(t-1)$, $e^{-(t-1)}U(t-1)$.

Question 4. Déduire des résultats précédents l'expression de s(t) sur l'intervalle [0 ; 1[.

La décomposition donne $S(p) = 2\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}\right) - e^{-p}\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}\right)$. Pour $0 \leq t < 1$, les termes retardés sont nuls puisque $U(t-1) = 0$. Il reste donc l'inverse des deux premiers termes.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Pour $0 \leq t < 1$, $s(t) = 2(1 - e^{-t})$.

Question 5.a. Sachant que s(t) = (e − 2)e⁻ᵗ + 1 sur [1 ; +∞[, calculer s(1), puis donner sa valeur exacte et une valeur approchée au dixième.

À $t = 1$, la formule donnée conduit à $s(1) = (e - 2)e^{-1} + 1 = 2 - 2/e$. Avec $e \approx 2{,}71828$, cela donne environ $1{,}264$, soit $1{,}3$ au dixième.

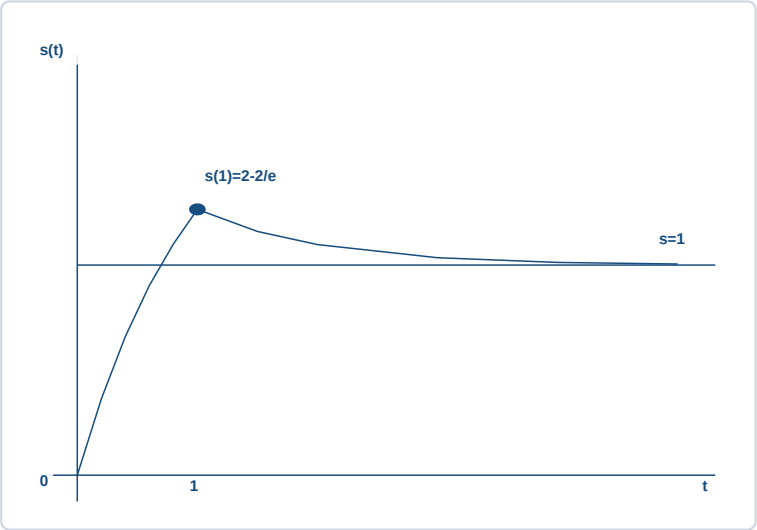
✓ RÉPONSE À RETENIR

$s(1) = 2 - \dfrac{2}{e} \approx 1{,}3$.

Question 5.b. Compléter, sur le document-réponse à rendre avec la copie, la courbe représentative de la fonction s.

Sur $[0, 1[$, la courbe suit $2(1 - e^{-t})$ et croît de 0 à $2 - 2/e$. Pour $t \geq 1$, elle suit $1 + (e - 2)e^{-t}$, décroît à partir de cette même valeur et tend vers 1. Le raccord est donc continu en $t = 1$.

Courbe du signal de sortie s(t)



✓ RÉPONSE À RETENIR

La courbe croît jusqu'au maximum $s(1) = 2 - 2/e \approx 1{,}264$, puis décroît vers l'asymptote $s = 1$.

Question 5.c. Donner la limite de s(t) lorsque t tend vers +∞.

Pour $t \geq 1$, $s(t) = 1 + (e - 2)e^{-t}$. Lorsque t tend vers $+\infty$, le terme exponentiel tend vers 0. La limite est donc 1.

✓ **RÉPONSE À RETENIR**

$\lim\limits_{t \to +\infty} s(t) = 1.$

Ce qu'il faut retenir de ce sujet (Session 2022)

Bilan de l'épreuve : Épreuve de mathématiques du BTS, session 2022, code 22MATGRB2, d'une durée de 2 heures. Le coefficient est de 1,5 en Conception et industrialisation en microtechniques et de 2 en Électrotechnique. Deux exercices de 10 points étudient le freinage d'un chariot et un système électrique. Les compétences évaluées portent sur les équations différentielles, l'analyse, l'intégration et les transformées de Laplace.

Notions-clés, formules & règles à maîtriser

- Pour y' + ay = b, la solution générale est la somme d'une solution de l'équation homogène et d'une solution particulière.
- Si $f(t) = 15e^{-0,8t} + 5$, sa limite vaut 5 et sa courbe admet l'asymptote horizontale d'équation y = 5.
- La distance parcourue entre t_0 et t_1 est l'intégrale de la vitesse : $d = \int_{t_0}^{t_1} f(t)\,dt$.
- Un retard d'une unité dans le temps correspond au facteur e^{-p} en transformée de Laplace.

Points de vigilance & attentes du jury

- Pour l'équation différentielle non homogène, distinguer la solution générale homogène de la solution particulière.
- Pour décider si le chariot s'arrête, vérifier si sa vitesse atteint zéro, pas seulement si elle décroît.
- Dans les calculs de Laplace avec retard, conserver le facteur exponentiel e^{-p} et tenir compte de l'échelon retardé.
- Reporter les tracés sur le document-réponse et respecter les arrondis demandés, au centimètre ou au dixième.

Questions fréquentes sur cette épreuve (Q&A Examen)

Q : Comment résoudre une équation différentielle avec un terme constant ?

On résout d'abord l'équation homogène associée, puis on détermine une solution particulière. La solution générale est leur somme. On utilise ensuite la condition initiale pour déterminer la constante.

Q : Comment savoir si la vitesse permet de conclure que le chariot s'arrête ?

Il faut déterminer si la vitesse atteint effectivement zéro à un instant de l'intervalle étudié. Une vitesse qui tend vers une limite strictement positive, même si elle diminue, ne correspond pas à un arrêt.

Q : Comment répartir le temps entre les exercices ?

L'épreuve dure deux heures et comprend deux exercices de 10 points. Répartissez le temps entre les deux, puis gardez quelques minutes pour vérifier les calculs, les unités, les tracés et les arrondis demandés.

Q : Quels éléments vérifier pour les réponses graphiques et les calculs approchés ?

Effectuez les tracés sur le document-réponse demandé. Lorsqu'une valeur exacte et une approximation sont exigées, indiquez les deux et respectez la précision prescrite, notamment au centimètre ou au dixième.

Sujet officiel associé (PDF) : https://coursbtssio.fr/assets/annales/bts-sio/E2 - Mathématiques/2022/BTS SIO - E2 - Mathématiques - Session 2022 - 2-Sujet.pdf

Ressources BTS Services Informatiques aux Organisations : Toutes les annales & corrigés • Fiches de révision complètes • Simulateur de notes d'examen

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.