Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour en savoir plus sur nos formations disponibles, veuillez visiter :
formav.co/explorer

BTS SIO

Mathématiques - Groupement B

Session 2023 • Code sujet : **23MATGRB2** • Durée : **2 heures** • Coefficient : **1,5 en Conception et industrialisation en microtechniques ; 2 en Électrotechnique**

Sommaire

Cliquez sur une partie pour y accéder directement

1. Fermeture d'un tiroir : équation différentielle et étude de fonction (12 questions) **Page 3**

2. Série de Fourier d'une fonction périodique paire (10 questions) **Page 7**

3. Ce qu'il faut retenir & Questions fréquentes (FAQ) (Synthèse & Q&A Examen) **Page 10**

Sujet officiel (PDF) : https://coursbtssio.fr/assets/annales/bts-sio/E2 - Mathématiques/2023/BTS SIO - E2 - Mathématiques - Session 2023 - 2-Sujet.pdf

1. Fermeture d'un tiroir : équation différentielle et étude de fonction

La distance entre le fond du tiroir, repéré par M, et le fond du meuble, repéré par O, est modélisée par une fonction du temps, exprimée en centimètres. L'exercice étudie la fermeture à l'aide d'une équation différentielle, des variations de la fonction, d'un algorithme et du calcul d'une position moyenne.

Partie A - Résolution d'une équation différentielle

Question 1.a. Résoudre l'équation caractéristique r² + 5r + 4 = 0.

Le discriminant de $r^2 + 5r + 4$ vaut $5^2 - 4 \times 1 \times 4 = 9$. Les deux racines sont donc $\frac{-5-3}{2}$ et $\frac{-5+3}{2}$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$r = -4$ ou $r = -1$.

Question 1.b. Résoudre l'équation différentielle (E₀) : y'' + 5y' + 4y = 0, à l'aide du tableau fourni.

> Les racines caractéristiques sont réelles et distinctes : $r_1 = -1$ et $r_2 = -4$. Le tableau fourni associe alors à l'équation différentielle une combinaison linéaire des exponentielles $e^{r_1 t}$ et $e^{r_2 t}$. Les constantes sont arbitraires.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$y(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-4t}$, avec $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

Partie A - Conditions initiales et distance

Question 2.a. À l'instant t = 0, le point M est situé à 20 cm de O et se déplace vers O avec une vitesse négative égale à -10 cm·s⁻¹. En déduire les valeurs de f(0) et de f'(0).

La distance initiale donne la première valeur. La vitesse de rapprochement est la dérivée de la distance par rapport au temps :

- À $t = 0$, $OM = 20$ cm, donc $f(0) = 20$.
- La vitesse initiale est négative et vaut $-10\ \mathrm{cm\cdot s^{-1}}$, donc $f'(0) = -10\ \mathrm{cm\cdot s^{-1}}$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$f(0) = 20$ cm et $f'(0) = -10\ \mathrm{cm\cdot s^{-1}}$.

Question 2.b. **On admet que f(t) = (70/3)e⁻ᵗ - (10/3)e⁻⁴ᵗ. Déterminer la valeur exacte de la distance OM deux secondes après le début de la fermeture.**

On évalue la fonction au temps $t = 2$ s en remplaçant t par 2 dans les deux exponentielles : $f(2) = \frac{70}{3}e^{-2} - \frac{10}{3}e^{-4\times 2}$. Cette valeur correspond à la distance entre les points O et M deux secondes après le début de la fermeture.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $OM = f(2) = \frac{70}{3}e^{-2} - \frac{10}{3}e^{-8} \approx 3{,}16$ cm.

Question 2.c. **Le tiroir est dit fermé lorsque la distance OM est inférieure à 0,5 cm. Le constructeur affirme que le tiroir est fermé en moins de 4 secondes. Dire s'il a raison et justifier.**

La fonction est strictement décroissante sur $[0; +\infty[$. Il suffit donc de vérifier la distance à 4 secondes :

- $f(4) = \frac{70}{3}e^{-4} - \frac{10}{3}e^{-16} \approx 0{,}427$ cm.
- Comme $0{,}427 < 0{,}5$, le seuil est atteint avant 4 secondes.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Oui : le tiroir est fermé en moins de 4 s, car $f(4) \approx 0{,}427 < 0{,}5$ cm.

Partie B - Étude de fonction

Question 1.a. **Sachant que la limite de e⁻ᵘ lorsque u tend vers +∞ est nulle, déterminer la limite de f(t) lorsque t tend vers +∞.**

Lorsque $t \to +\infty$, les exposants $-t$ et $-4t$ tendent vers $-\infty$. Ainsi, $e^{-t} \to 0$ et $e^{-4t} \to 0$. Les deux termes de $f(t) = \frac{70}{3}e^{-t} - \frac{10}{3}e^{-4t}$ tendent donc vers 0.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = 0$.

Question 1.b. **En déduire une équation de l'asymptote à la courbe représentative C de f.**

> La courbe représentative d'une fonction qui tend vers une valeur finie L admet l'asymptote horizontale $y = L$ en $+\infty$. Ici, la limite trouvée est nulle : la courbe se rapproche donc de l'axe des abscisses.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Asymptote horizontale : $y = 0$.

Question 2.a. Déterminer l'expression de f'(t) pour tout t appartenant à [0 ; +∞[.

On dérive chaque exponentielle avec la règle $(e^{at})' = ae^{at}$:

$$f'(t) = \frac{70}{3}(-1)e^{-t} - \frac{10}{3}(-4)e^{-4t}.$$

Le second terme devient positif, car le coefficient négatif est multiplié par -4.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$f'(t) = -\frac{70}{3}e^{-t} + \frac{40}{3}e^{-4t}$.

Question 2.b. On admet que f'(t) < 0 sur [0 ; +∞[. En déduire le tableau de variations de f sur cet intervalle.

Comme $f'(t) < 0$, la fonction est strictement décroissante. De plus, $f(0) = 20$ et sa limite en $+\infty$ vaut 0. Le tableau de variations est donc :

t	**0**	$+\infty$
Signe de $f'(t)$	$-$	
Variations de f	20	$\searrow$ 0

✓ RÉPONSE À RETENIR

f décroît de 20 vers 0 sur $[0; +\infty[$.

Partie B - Algorithme

Question 3.a. Compléter le tableau de suivi de l'algorithme à partir de la ligne numéro 36, en ajoutant si besoin des lignes jusqu'à son arrêt. Indiquer t, la valeur de f(t) arrondie à 10^{-2} et la valeur de la condition testée.

À chaque passage dans la boucle, t augmente de $0{,}1$. On teste ensuite si $f(t) > 0{,}5$. La condition reste vraie à $t = 3{,}8$, puis devient fausse à $t = 3{,}9$, ce qui arrête l'algorithme.

Ligne	t	$f(t)$, arrondie à 10^{-2}	Condition $f(t) > 0{,}5$
36	3,6	0,64	VRAIE
37	3,7	0,58	VRAIE
38	3,8	0,52	VRAIE
39	3,9	0,47	FAUSSE

✓ **RÉPONSE À RETENIR**

L'algorithme s'arrête à la ligne 39, avec $t = 3{,}9$.

Question 3.b. Donner la valeur de la variable t à la fin de l'exécution de l'algorithme et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

La boucle s'arrête dès que la condition $f(t) > 0{,}5$ est fausse. La dernière mise à jour de t conduit à $3{,}9$, où $f(t) \approx 0{,}47$ cm. Cette distance est inférieure au seuil de fermeture de 0,5 cm.

✓ **RÉPONSE À RETENIR**

$t = 3{,}9$ s : le tiroir est fermé, car $f(3{,}9) \approx 0{,}47 < 0{,}5$ cm.

Partie B - Position moyenne

Question 4. La position moyenne du tiroir est définie par m = (1/4)∫₀⁴ f(t)dt. Démontrer que m = 45/8 - (35/6)e⁻⁴ + (5/24)e⁻¹⁶.

Une primitive de $f(t)$ est $-\frac{70}{3}e^{-t} + \frac{5}{6}e^{-4t}$. On évalue cette primitive entre 0 et 4, puis on divise par 4 :

$$m = \frac{1}{4}\left[-\frac{70}{3}e^{-t} + \frac{5}{6}e^{-4t}\right]_0^4 = \frac{45}{8} - \frac{35}{6}e^{-4} + \frac{5}{24}e^{-16}.$$

✓ **RÉPONSE À RETENIR**

$m = \frac{45}{8} - \frac{35}{6}e^{-4} + \frac{5}{24}e^{-16} \approx 5{,}5182$ cm.

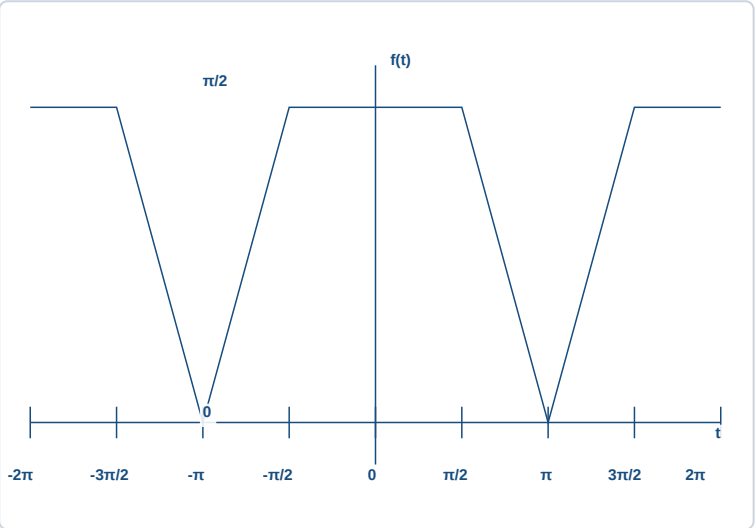
2. Série de Fourier d'une fonction périodique paire

L'exercice porte sur une fonction paire de période 2π, définie par morceaux sur [0 ; π], et sur son développement en série de Fourier. Les questions mobilisent sa représentation graphique, le calcul des coefficients, l'étude de la somme partielle s_3 et l'approximation de la valeur efficace.

Question 1. Sur le document-réponse, tracer la représentation graphique de la fonction f sur l'intervalle [-2π ; 2π].

La fonction est paire et de période 2π. Sur $[0, \pi/2]$, elle vaut $\pi/2$, puis décroît linéairement jusqu'à 0 en π. La symétrie par rapport à l'axe vertical donne le motif sur $[-\pi, \pi]$, puis la périodicité permet de le répéter sur l'intervalle demandé. Le tracé ci-dessous indique les valeurs aux points de raccordement.

Représentation de f sur [-2π ; 2π]



✓ RÉPONSE À RETENIR

Tracé pair et périodique de période 2π, avec un plateau à $\pi/2$ et des zéros aux multiples impairs de π.

Question 2. Démontrer que, pour tout entier n supérieur ou égal à 1, le coefficient b_n est nul.

D'après le formulaire, $b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(nt)\,dt$, puisque la période vaut 2π. La fonction f est paire, tandis que $t \mapsto \sin(nt)$ est impaire. Leur produit est donc impair. Son intégrale sur l'intervalle symétrique $[-\pi, \pi]$ est nulle, pour tout entier $n \geq 1$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Pour tout entier $n \geq 1$, $b_n = 0$.

Question 3. **On note ω la pulsation associée à la fonction f. Déterminer ω.**

La période de la fonction est $T = 2\pi$. Le formulaire donne la relation entre période et pulsation : $\omega = \frac{2\pi}{T}$. En substituant la période indiquée dans l'énoncé, on obtient $\omega = \frac{2\pi}{2\pi} = 1$. La pulsation s'exprime en radians par unité de temps.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $\omega = 1$.

Question 4. **Démontrer que a₀ = 3π/8.**

Pour une fonction paire de période 2π, le formulaire donne $a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\,dt$. Sur $[0, \pi/2]$, l'aire sous la courbe vaut $(\pi/2)(\pi/2) = \pi^2/4$. Sur $[\pi/2, \pi]$, elle vaut $(\pi/2)(\pi/2)/2 = \pi^2/8$. Ainsi, $a_0 = \frac{1}{\pi}(\frac{\pi^2}{4} + \frac{\pi^2}{8})$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $a_0 = \frac{3\pi}{8}$.

Question 5. **Démontrer que, pour tout entier n supérieur ou égal à 1, aₙ = ∫₀^(π/2) cos(nt)dt + (2/π)∫_(π/2)^π (π - t)cos(nt)dt.**

Pour $n \geq 1$, la parité de f et le formulaire donnent $a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\cos(nt)\,dt$. On sépare l'intégrale au point où l'expression de f change : $a_n = \frac{2}{\pi}[\int_0^{\pi/2} \frac{\pi}{2}\cos(nt)\,dt + \int_{\pi/2}^{\pi}(\pi - t)\cos(nt)\,dt]$. Le premier coefficient se simplifie en 1, d'où l'égalité demandée.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $a_n = \int_0^{\pi/2}\cos(nt)\,dt + \frac{2}{\pi}\int_{\pi/2}^{\pi}(\pi - t)\cos(nt)\,dt$, pour tout $n \geq 1$.

Question 6. **On admet que aₙ = 2/(πn²)(cos(nπ/2) - cos(nπ)). Déterminer les valeurs exactes de a₁, a₂ et a₃.**

On utilise la formule admise $a_n = \frac{2}{\pi n^2}[\cos(\frac{n\pi}{2}) - \cos(n\pi)]$. Pour $n = 1$, la différence des cosinus vaut 1. Pour $n = 2$, elle vaut -2. Pour $n = 3$, elle vaut 1. En remplaçant chaque valeur de n dans la formule, on obtient les coefficients exacts ci-dessous.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $a_1 = \frac{2}{\pi}, \quad a_2 = -\frac{1}{\pi}, \quad a_3 = \frac{2}{9\pi}$.

Question 7. **En déduire que $s_3(t) = 3\pi/8 + (2/\pi)\cos(t) - (1/\pi)\cos(2t) + (2/(9\pi))\cos(3t)$.**

La somme partielle d'ordre 3 est $s_3(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{3}(a_n\cos(nt) + b_n\sin(nt))$. Les coefficients b_n sont nuls d'après la question 2. On remplace alors a_0, a_1, a_2, a_3 par leurs valeurs établies aux questions précédentes. Le regroupement des termes donne l'expression suivante.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $s_3(t) = \frac{3\pi}{8} + \frac{2}{\pi}\cos(t) - \frac{1}{\pi}\cos(2t) + \frac{2}{9\pi}\cos(3t)$.

Question 8. **Indiquer, sans justification, laquelle des trois courbes proposées est associée à la fonction s_3.**

La somme partielle s_3 est une courbe périodique et régulière, avec un maximum au voisinage de $t = 0$ et des minima au voisinage de $t = \pm\pi$. Parmi les trois représentations du sujet, ces caractéristiques correspondent à la courbe numéro 2.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Courbe numéro 2.

Question 9.a. **On note $P = (a_0)^2 + 1/2[(a_1)^2 + (a_2)^2 + (a_3)^2]$. Donner une valeur approchée de P à 10^{-4} près.**

En utilisant les coefficients exacts, on obtient $P = (\frac{3\pi}{8})^2 + \frac{1}{2}[(\frac{2}{\pi})^2 + (-\frac{1}{\pi})^2 + (\frac{2}{9\pi})^2]$. L'évaluation numérique de cette expression donne $P \approx 1{,}64371784$. L'arrondi au 10^{-4} près est donc $1{,}6437$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $P \approx 1{,}6437$.

Question 9.b. **On note F la valeur efficace de f et on admet que $F^2 = \pi^2/6$. P constituant une approximation de F^2, choisir le pourcentage d'erreur parmi 0,1 %, 1 % et 10 %. Une seule réponse est exacte et aucune justification n'est demandée.**

Le pourcentage d'erreur relative est $\frac{|P - F^2|}{F^2} \times 100$, avec $F^2 = \frac{\pi^2}{6}$ et la valeur de P obtenue à la question précédente. Il vaut environ $0{,}074\,\%$. Le choix proposé le plus proche est donc $0{,}1\,\%$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $0{,}1\,\%$.

Ce qu'il faut retenir de ce sujet (Session 2023)

Bilan de l'épreuve : Épreuve de mathématiques du BTS Groupement B, session 2023, code 23MATGRB2, d'une durée de 2 heures. Le coefficient est de 1,5 en Conception et industrialisation en microtechniques et de 2 en Électrotechnique. Les deux exercices étudient la fermeture d'un tiroir par équation différentielle et analyse de fonction, puis la représentation et l'approximation de fonctions par séries de Fourier.

Notions-clés, formules & règles à maîtriser

- Pour $y'' + 5y' + 4y = 0$, l'équation caractéristique associée est $r^2 + 5r + 4 = 0$.
- La distance du tiroir est modélisée par $f(t) = (70/3)e^{-t} - (10/3)e^{-4t}$, avec t en secondes et f(t) en centimètres.
- Pour une fonction paire, les coefficients sinus b_n de sa série de Fourier sont nuls.
- Pour une fonction de période T, la pulsation est $\omega = 2\pi/T$; ici $T = 2\pi$.

Points de vigilance & attentes du jury

- Distinguer la distance f(t), exprimée en centimètres, de f'(t), qui représente la vitesse.
- Dans l'algorithme, tester la condition avant l'incrément de t et respecter l'arrondi demandé au centième.
- Pour la série de Fourier, exploiter la parité et appliquer les formules du formulaire avec les bonnes bornes.
- Pour le pourcentage d'erreur, rapporter l'écart entre P et F^2 à la valeur de référence F^2.

Questions fréquentes sur cette épreuve (Q&A Examen)

Q : Comment trouver la solution générale de l'équation différentielle du tiroir ?

On résout d'abord l'équation caractéristique $r^2 + 5r + 4 = 0$. Ses deux racines réelles distinctes donnent une solution générale de la forme $y(t) = C_1e^{(r_1t)} + C_2e^{(r_2t)}$. Les conditions initiales permettent ensuite de déterminer les constantes.

Q : Pourquoi les coefficients b_n sont-ils nuls dans l'exercice sur Fourier ?

La fonction f est paire et la fonction sinus est impaire. Leur produit est impair, donc son intégrale sur un intervalle symétrique est nulle. Les coefficients b_n, calculés sur une période, sont ainsi nuls.

Q : Comment gérer le temps dans cette épreuve de deux heures ?

Les deux exercices valent chacun 10 points et peuvent être traités indépendamment. Commencez par les questions accessibles, puis gardez du temps pour les calculs, les justifications demandées et la vérification des unités, des arrondis et des réponses à choix multiples.

Q : Quelles consignes de présentation faut-il respecter pour les réponses ?

Justifiez les démonstrations, donnez des valeurs exactes lorsqu'elles sont demandées et respectez la précision indiquée pour les valeurs approchées. Pour la question 9.b, une seule réponse est attendue et aucune justification n'est demandée.

Sujet officiel associé (PDF) : https://coursbtssio.fr/assets/annales/bts-sio/E2 - Mathématiques/2023/BTS SIO - E2 - Mathématiques - Session 2023 - 2-Sujet.pdf
Ressources BTS Services Informatiques aux Organisations : Toutes les annales & corrigés • Fiches de révision complètes • Simulateur de notes d'examen

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.